Завдання відбіркового туру міського ТЮМ

1. «Ланцюжок коренів»

Для всіх натуральних *п* доведіть нерівність .

1. «Відкладаємо рівні відрізки»

У трикутнику *ABC* кут *C* дорівнює 20º. Відкладемо на стороні *AC* відрізок *MC=AB*, а на стороні *BC* – відрізок *CK=AM*. Знайдіть величину кута *MKC*, якщо кут *BAC* дорівнює 20º.

1. «Ощадливі перестановки»

Чудний чоботар Чеслав зшив 30 різних пар взуття, перемішав усі 60 чоботів між собою та розставив випадковим чином у ряд. Його педантична подруга Павлина переставляє взуття: за один раз Павлина може взяти будь-які два чоботи та обміняти їх місцями. За яку мінімальну кількість таких обмінів Павлина зможе гарантовано досягти розташування, в якому кожна пара чоботів розташована поруч, причому ліворуч стоїть лівий чобіт пари, а праворуч – правий?

1. «Сума дробів»

Раціональне число r=0,1415926…, складене із першої тисячі знаків десяткового розкладу числа $π-3$. Почнемо виписувати число $s=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+…$ за таким правилом: на кожному кроці для натурального $n$до суми додається дріб $ \frac{1}{n}, $найбільший із можливих, але, так, щоб сума не виявилася більшою за число $r$. Таким чином, враховуючи, що $\frac{1}{7}=0,142…>r$, пишемо$ s=\frac{1}{8}+…$; далі, оскільки $ \frac{1}{8}+\frac{1}{61}=0,14166…>r$, пишемо $s=\frac{1}{8}+\frac{1}{61}+…$тощо. Доведіть, що цей процес обірветься, тобто на деякому етапі виявиться, що записано точнісінько числоr.

1. «Сума цифр кратного»

Відомо, що натуральне число *N* менше за 103. Шукаємо таке натуральне *M,* що воно ділиться на *N* , а *сума цифр* числа *M* не перевищує числа *k* Для якого найменшого *k* можна стверджувати, що таке число *M* в усіх випадках існує?

1. «З’єднуємо точки»

На площині розміщено тисяча точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. П’ять гравців по черзі сполучають ці точки відрізками, кожний олівцем свого кольору. За один хід дозволяється сполучити довільні дві точки, які ще не були з’єднані. Виграє той, хто першим отримає трикутник з вершинами в заданих точках, *усі сторони якого мають однаковий колір*. Чи може така гра закінчитися внічию?